

Vermessung der Wandrichtung aus Schattenpositionen eines Lotes zum Entwurf einer Sonnenuhr

K. Völkel

1 Aufbau einer Sonnenuhr

Im wesentlichen lassen sich Sonnenuhren, die ein ebenes Zifferblatt besitzen, in vier Klassen einteilen.

- Vertikale Sonnenuhr: Bei einer vertikalen Sonnenuhr ist das Zifferblatt auf einer senkrechten Wand aufgetragen. Häufig zieren derartige Uhren Kirchen oder öffentliche Gebäude. Wenn die Wand genau nach Süden zeigt, ist eine vertikale Sonnenuhr besonders einfach.



Abbildung 1. Sonnenuhr St. Gangolf Bamberg

- Horizontale Sonnenuhr: Das Zifferblatt der horizontalen Sonnenuhr ist waagrecht angeordnet. Die Berechnung des Zifferblattes ähnelt dem der Vertikalsonnenuhr. Derartige Uhren findet man gelegentlich auf großen Freiflächen. Schüler des Frankenwald-Gymnasiums errichteten auf dem Gelände der Landesgartenschau in Kronach Oberfrankens größte (horizontale) Sonnenuhr.
- Äquatoriale Sonnenuhr: Das Zifferblatt der äquatorialen Sonnenuhr ist entsprechend dem geographischen Breitengrad geneigt und verläuft parallel zur Ebene des Himmelsäquators. Der Schattenwerfer steht dann senkrecht auf der Mitte des kreisförmigen Zifferblattes.
- Polare Sonnenuhr: Das Zifferblatt der polaren Sonnenuhr liegt in einer Ebene parallel zur Richtung des Himmelspoles.

Bei allen Sonnenuhren zeigt der Schattenwerfer (Gnomon) immer in Richtung des Himmelspoles. Bei der sphärischen Sonnenuhr im Botanischen Garten des Hains ist dieses



Abbildung 2. Horizontale Sonnenuhr auf dem Gelände der Landesgartenschau 2002 in Kronach



Abbildung 3. Sonnenuhr im Botanischen Garten (Hain)

ebenfalls sehr schön erkennbar. Nachfolgend wird nur der Typ der vertikalen Sonnenuhr betrachtet. Für die Konstruktion des Zifferblattes muss die genaue Richtung der Wand bekannt sein, die mit einer astronomischen Vermessungsmethode aus Schattenpositionen eines Lotes bestimmt wird. Hierzu sind einige Grundkenntnisse aus der Astronomie vonnöten.

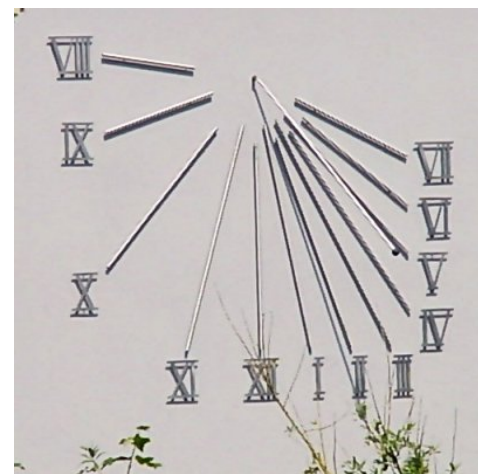


Abbildung 4. Vertikale Sonnenuhr bei der Einmündung der Frutolfstraße in die Schweinfurter Straße

2 Grundlagen

2.1 Astronomische Koordinatensysteme

Das Horizontsystem (Höhe h , Azimut A)

Dieses Koordinatensystem nimmt als Grundlage seiner Koordinatenzählung Horizontebene und Zenit des Beobachters.

Der Winkel, unter dem ein Gestirn gegen die Horizontebene erscheint, wird als Höhe h bezeichnet und von 0° bis $+90^\circ$ (Zenit) oder -90° (Nadir) gezählt. Nur entlang eines Horizontalkreises, dessen Ebene parallel zur Horizontebene verläuft, ist die Höhe konstant. Allerdings fällt für einen Beobachter, der sich auf der geographischen Breite $\varphi \neq 90^\circ$ befindet, kein Horizontalkreis mit der Sternbahn zusammen, da die Bahnebene des Sterns senkrecht zur Polachse steht.

Die Großkreise, die vom Zenit zum Nadir verlaufen und die Horizontalkreise senkrecht schneiden, werden Vertikalkreise genannt. Derjenige Vertikalkreis, der sich als Projektion des Ortsmeridians des Beobachters auf die Sphäre ergibt, heißt Himmelsmeridian. Er verläuft durch Zenit, Nadir und die Himmelspole.

Dieser Himmelsmeridian schneidet den Horizont im Nordpunkt N und Südpunkt S . Der in der Horizontebene gemessene Winkel zwischen Nordpunkt und Vertikalkreis des Sterns ist die zweite Koordinate, der Azimut A . Der Drehsinn ist von Norden (0°) über Osten (90°) nach Süden (180°) festgelegt. Auf der scheinbaren Bahn an der Sphäre erreicht ein Stern seine kleinste und größte Höhe (obere und untere Kulmination) jeweils dann, wenn er den Himmelsmeridian durchläuft.

Der Vorteil dieses Koordinatensystems liegt darin, dass es dem System des Beobachters am besten angepasst ist; als Nachteil ändern sich jedoch die Koordinaten eines Sterns ständig.

Das feste Äquatorsystem (Stundenwinkel t , Deklination δ)

Als Bezugsebene wird die Himmels-Äquatorebene gewählt. Da diese senkrecht zur Polachse steht, bleibt ein Stern bei seiner täglichen Bewegung parallel zur Äquatorebene auf seinem Parallelkreis. Sein Winkelabstand vom Äquator, die Deklination δ des Sterns, bleibt also konstant.

Der Großkreis der Sphäre, der durch den Nordpol und den Stern verläuft, heißt Stundenkreis. Der Winkel zwischen dem Himmelsmeridian und dem Stundenkreis wird Stundenwinkel t genannt. Zu seiner Zählung wird nicht nur das übliche Winkelmaß verwendet, sondern meistens das Stundenmaß von 0 h bis 24 h, wobei 360° genau 24 h entspricht. Wegen seines speziellen Maßes gibt der Stundenwinkel t automatisch die Zeit nach der oberen Kulmination eines Sterns an.

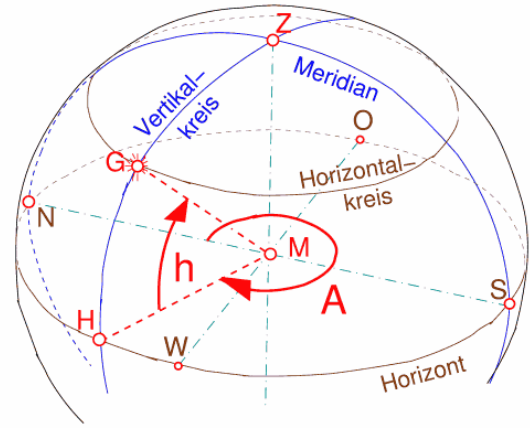


Abbildung 5. Horizontsystem des Beobachters

Der Vorteil dieses Koordinatensystems liegt darin, dass die Deklination eines Sterns konstant bleibt; als Nachteil muss allerdings der Stundenwinkel für jeden Ort und jede Zeit angegeben werden können.

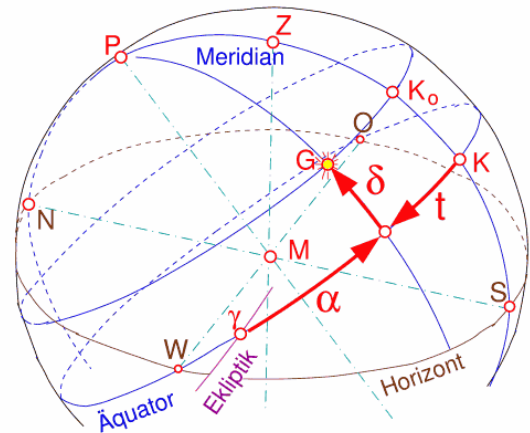


Abbildung 6. Äquatorsysteme

Das bewegliche Äquatorsystem (Deklination δ , Rektaszension α)

Als Bezugsebene wird wieder die Himmels-Äquatorebene gewählt.

Zum Katalogisieren von Sternen wünscht man sich eine festbleibende zweite Koordinate. Hierzu wird eine (einmal willkürliche) Bezugsmarke auf dem Himmelsäquator vereinbart. Die Bezugsmarke ist der sog. Frühlingspunkt. Die Sonne steht genau am Frühlingsanfang und Herbstanfang am Himmelsäquator. Die Ekliptik schneidet den Äquator im Frühlingspunkt und Herbstpunkt. Der Frühlingspunkt liegt im Sternbild Fische.

Der auf dem Himmelsäquator vom Frühlingspunkt zum Stundenkreis des Sterns gemessene Winkel heißt Rektas-

zension α . Dieser bleibt konstant, da sich für den Beobachter der Frühlingspunkt, genauso wie der Stundenkreis, mitbewegt.

Die Rektaszension α wird - wie der Stundenwinkel t - von 0 h bis 24 h angegeben.

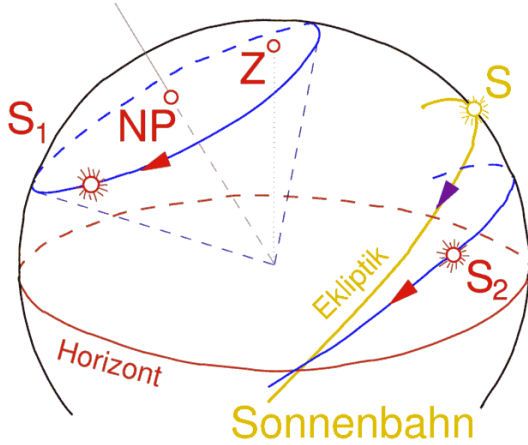


Abbildung 7. Bahn der Sonne an der Himmelssphäre

Der obere Kulminationspunkt ist der höchste Punkt der Bahn eines Sterns. Dieser Punkt liegt ebenso, wie der tiefste Bahnpunkt, der untere Kulminationspunkt, auf dem Himmelsmeridian. Der Stundenwinkel t gibt die Zeit an, die seit der oberen Kulmination des Sterns verflissen ist.

Für die obere Kulminationshöhe gilt: $h_o = \delta + (90^\circ - |\varphi|)$.

Prinzipiell kann die Position der Sonne mit gleichartigen Koordinaten wie für einen Fixstern beschrieben werden. Im Gegensatz zu einem Fixstern (ohne Eigenbewegung) ändern sich für die Sonne Deklination, Rektaszension und Stundenwinkel im Lauf der Zeit, da sie sich auf der gegen den Himmelsäquator geneigten Ekliptik¹ auf einer exzentrischen Bahn bewegt.

Wegen der Schiefe der Ekliptik gilt für die Deklination der Sonne $-23,5^\circ \leq \delta \leq +23,5^\circ$. Die Sonne steht immer an einem Ort des geographischen Breitengrades $\varphi = \delta$ im Zenit.

2.2 Zeitrechnung

Heute bildet die Atomphysik mit der Cäsium-Atomuhr die Grundlage unserer Zeit- und Längenmessung, wobei die Lichtgeschwindigkeit per definitionem festgelegt ist. Noch vor wenigen Jahrzehnten diente die Erde als primäre Uhr und bestimmte die Sekunde; die Längeneinheit Meter

¹ Analoges gilt für die Planeten, die sich in einem Bereich um die Ekliptik bewegen.



Abbildung 8. Sonnenaufgang im Abstand von zehn Tagen, aufgenommen im August in der Bucht von Tolo mit der Insel Koronisi (Griechenland)

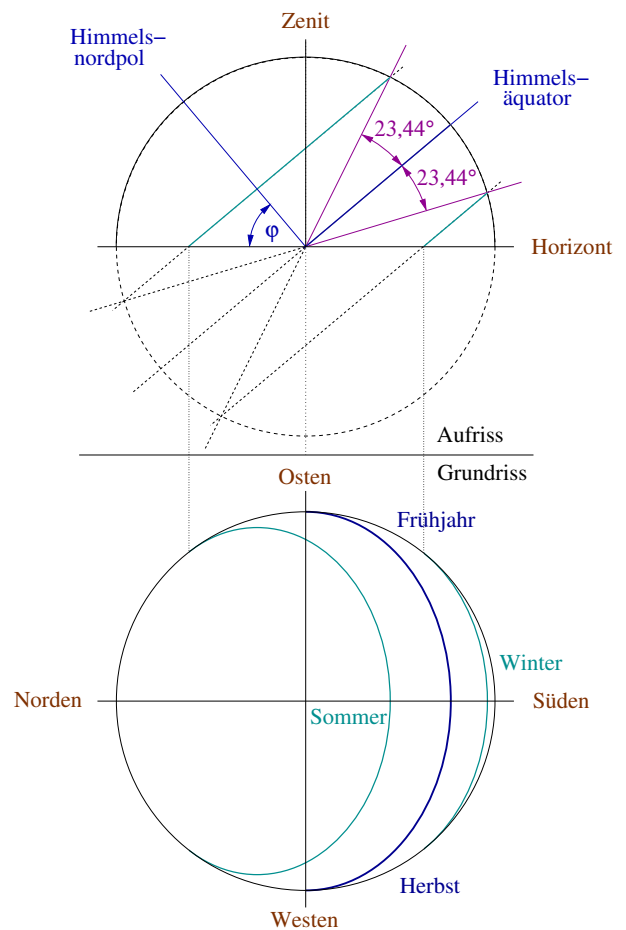


Abbildung 9. Jahreszeitliche Änderung des Tagesbogens

wurde durch einen Vergleichskörper (Urmeter) vorgegeben und die Lichtgeschwindigkeit musste möglichst genau gemessen werden.

Astronomisch gesehen bildet der vollständige Umlauf der Erde um die Sonne das Jahr, die Drehung der Erde um

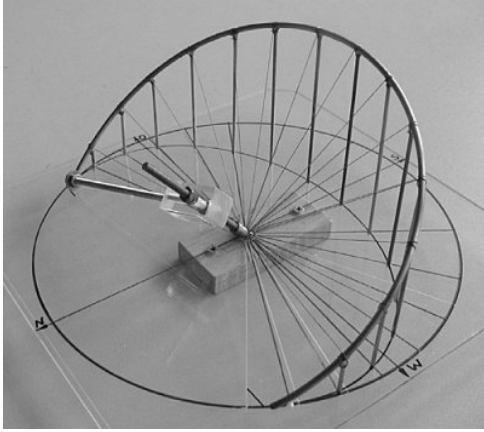


Abbildung 10. nach [Ba2]: Räumliches Modell eines Tagesbogens

ihre eigene Achse liefert als Zeiteinheit den Tag, der in Stunden, Minuten und Sekunden unterteilt wird. Die Zeitmessung wird aus einer Winkelmessung des Phasenwinkels der Rotation oder des Umlaufes abgeleitet. Der Winkel zwischen dem Meridian des Beobachters und dem Stundenkreis des Frühlingspunktes oder demjenigen der Sonne bildet für die Erdrotation die Phase.

Unter der Sternzeit versteht man den Stundenwinkel des Frühlingspunktes. Für jedes Gestirn setzt sich die Sternzeit additiv aus dem Stundenwinkel und der Rektaszension zusammen. Bei einem Stundenwinkel von $t = 0$ h ist das Gestirn in oberer Kulmination und die Sternzeit θ gleich der Rektaszension α . Da die Erdbahn leicht ellip-

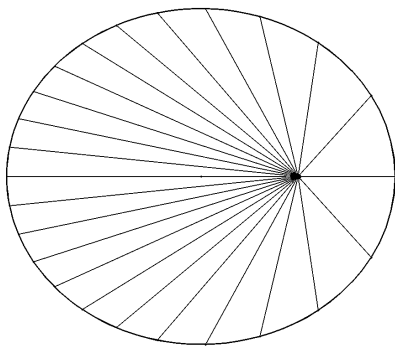


Abbildung 11. nach [Ba2]: (nicht maßstabsgerechte) Keplerbewegung

tisch ist, werden unterschiedlich große Winkel in der gleichen Zeiteinheit zurückgelegt. Dieser Effekt und die Bewegung der Sonne auf der Ekliptik führt auf die wahre Sonnenzeit², die von jeder Sonnenuhr dargestellt wird. Die wahre Sonnenzeit ist der Stundenwinkel der wahren Son-

² besser wäre wohl die Bezeichnung wahre Ortssonnenzeit

ne plus 12 h.³ Die Zeit eines Ortes auf der Erde hängt von dessen geographischer Länge λ ab, so dass Orte auf verschiedenen Längengraden auch unterschiedliche Ortszeit haben. Diesen für das tägliche Leben schwierig zu handhabenden Effekt gleicht man durch die praktikableren Zeitzonen auf der Erde aus. Dabei verwenden alle Orte einer Zeitzone die Ortszeit des sie bestimmenden Mittelmeridians. Für die MEZ (Mittleuropäische Zeit) gilt daher $7,5^\circ\text{Ost} \leq \lambda \leq 22,5^\circ\text{Ost}$ mit Mittelmeridian $\lambda = 15^\circ\text{Ost}$, der z. B. durch Görlitz verläuft.

2.3 Zeitgleichung

Um trotz der Keplerbewegung ein gleichmäßiges Zeitmaß zu erhalten, bedient man sich einer gedachten mittleren Sonne, die auf dem Himmelsäquator mit konstanter Geschwindigkeit läuft und einen Umlauf in genau derselben Zeit wie die wahre Sonne vollendet. Analog zur wahren Sonnenzeit gilt dann, dass die mittlere Sonnenzeit der Stundenwinkel der mittleren Sonne plus 12 h ist. Die Beziehung zwischen wahrer und mittlerer Sonnenzeit ist durch die Zeitgleichung gegeben:

Zeitgleichung = wahre Sonnenzeit – mittlere Sonnenzeit

Die Zeitgleichung (vgl. Abb. 12) entsteht also aus

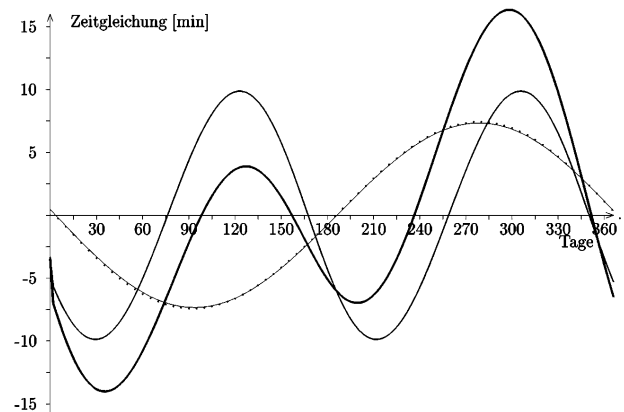


Abbildung 12. nach [Ba2]: Entstehung der Zeitgleichung

zwei Einflüssen, einmal der Bewegung mit unterschiedlicher (Winkel-)Geschwindigkeit auf der exzentrischen Bahn (dünne Linie) und zum anderen aus der Bewegung der Sonne auf der Ekliptik, die gegen den Himmelsäquator unterschiedlich geneigt ist (mitteldicke Linie). Beide Effekte ergeben zusammen die Kurve der Zeitgleichung (dicke Linie).

³ Dieser korrekte Zusammenhang führt vermutlich zu der verbreiteten Auffassung, dass die Sonne um zwölf Uhr Mittags am höchsten steht. Diese Aussage stimmt z. B. nur dann, wenn die wahre Ortszeit (WOZ) mit der mittleren Ortszeit (MOZ) am Bestimmungsmeridian der Zeitzone übereinstimmt.

Die Zeitgleichung spiegelt sich ebenso in den Zeitpunkten (gemessen in der jeweiligen Zonenzeit) wider, in denen die Sonne genau im Süden stehend ihren oberen Kulminationspunkt erreicht.

2.4 Algorithmen zur Bestimmung der Sonnenposition

Die erforderlichen Daten zur Sonnenposition können mit dem Computer selbst berechnet werden.

Ein sehr genauer Algorithmus ist in [RA1] dargestellt. Ebenso lässt sich der etwas ältere Algorithmus [Ry1] verwenden. Für beide Algorithmen ist ein geeignetes Hauptprogramm, z.B. `main.cpp` zu schreiben. Der C++-Compiler `devcpp` ([B12] als Freeware) hat sich für WIN32 wegen seiner integrierten Entwicklungsumgebung bewährt.

Eine andere Vorgehensweise bietet das Programm [So1] **Sonne Version 2.0.3**, das auch gegebenenfalls einen Entwurf der Sonnenuhr liefert.

Auch der elektronische Himmelsatlas *Cartes du Ciel* ([Ch1]) stellt die Daten zur Verfügung.

Ohne Computereinsatz müssten die Daten einem astronomischen Jahrbuch, z. B. [Ah1], entnommen werden.

3 Verfahren

3.1 Beispiel einer Kettenschaukel



Abbildung 13. Der Schatten einer Kettenschaukel fällt auf eine vertikale Wand

Das Beispiel einer Bilderfolge zum Schattenwurf einer Kettenschaukel lässt das Messverfahren dynamisch und anschaulich werden.

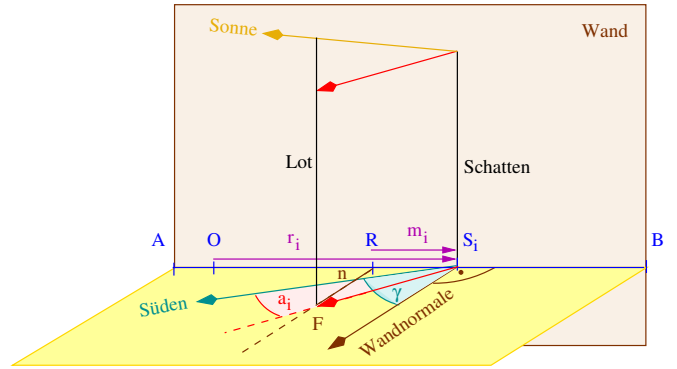


Abbildung 14. Herleitung des Messverfahrens

3.2 Herleitung der Gleichungen

Für die theoretische Herleitung des Verfahrens wird auf die Originalarbeit [O1] verwiesen, die auszugsweise im Anhang wiedergegeben ist.

3.3 Lösung des Gleichungssystems

Möchte man auf die Lösung des linearen Gleichungssystems von Hand verzichten, so kann ein Computer-Algebra-System, z.B. [Fu1], die Arbeit erleichtern.

4 Messbeispiele

4.1 Eingang Martinschule

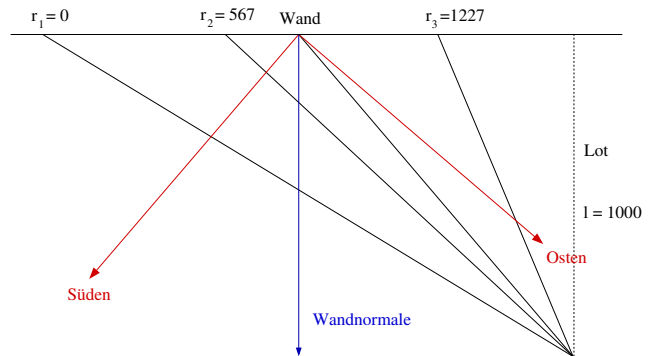


Abbildung 15. Messverfahren

Messung vom 24.06.2004 am Gebäude der Martinschule, hofseitig zwischen den Eingangstüren
 Koordinaten für Bamberg:
 $\lambda = 10^\circ 53' 22''$ Ost

[$\lambda = -10,889444444444^\circ$ oder $\lambda = -0,^h725962962962$]
 $\varphi = 49^\circ53'09''$ Nord
 $[\varphi = 49,885833333333^\circ]$

Tabelle 1. Berechnung erforderlicher Daten (Martinschule)

Zeitpunkt τ_i [MESZ]	Zeitgl. Minuten	Deklination δ_i [°]	Azimet a_i [°]	Höhe h_i [°]
07 ^h 53 ^m 00 ^s	-2,426847	23,405313	80,5034	23,0858
08 ^h 54 ^m 00 ^s	-2,435917	23,404371	91,8457	32,8577
09 ^h 27 ^m 00 ^s	-2,440822	23,403857	98,5007	38,1434
10 ^h 40 ^m 00 ^s	-2,451668	23,402706	115,8286	49,3494
13 ^h 18 ^m 55 ^s	-2,475261	23,400139	179,9978	63,5217

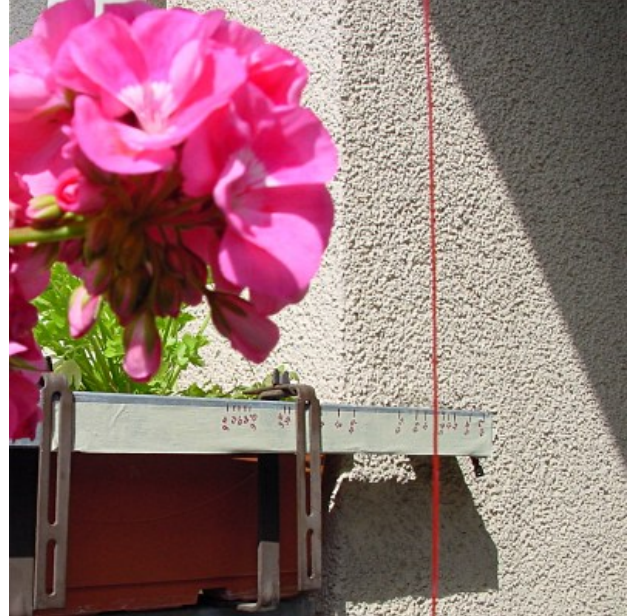


Abbildung 16. Messung am Balkon

Tabelle 2. Messung und Auswertung (Martinschule)

Zeitpunkt τ_i [MESZ]	Ort r_i [mm]	Std.winkel t_i [°]	tan(Azimet) tan a_i	Azimet a_i [°]
07 ^h 53 ^m 00 ^s	0	-81,46726733	5,977947	80,5034
08 ^h 54 ^m 00 ^s	567	-66,21953483	-31,031449	91,8457
09 ^h 27 ^m 00 ^s	795	-57,97076108	-6,690614	98,5007
10 ^h 40 ^m 00 ^s	1227	-39,72347258	-2,065963	115,8286
13 ^h 18 ^m 55 ^s	-	-0,00020416	-0,000039	179,9978

Tabelle 3. Berechnung erforderlicher Daten (Balkon)

Zeitpunkt τ_i [MESZ]	Zeitgl. Minuten	Deklination δ_i [°]	Azimet a_i [°]	Höhe h_i [°]
09 ^h 10 ^m 00 ^s	-5,5164	22,0464	95,5385	33,9599
09 ^h 13 ^m 00 ^s	-5,5173	22,0459	96,1458	34,4397
09 ^h 15 ^m 00 ^s	-5,5168	22,0459	96,5528	34,7597
09 ^h 18 ^m 00 ^s	-5,5172	22,0454	97,1671	35,2386
09 ^h 20 ^m 00 ^s	-5,5172	22,0454	97,5788	35,5578
09 ^h 35 ^m 00 ^s	-5,5189	22,0438	100,7350	37,9398
09 ^h 37 ^m 00 ^s	-5,5189	22,0438	101,1654	38,2558
09 ^h 50 ^m 00 ^s	-5,5206	22,0422	104,0253	40,2965
09 ^h 56 ^m 00 ^s	-5,5208	22,0417	105,3843	41,2303
10 ^h 02 ^m 00 ^s	-5,5219	22,0411	106,7700	42,1578
10 ^h 17 ^m 00 ^s	-5,5225	22,0401	110,3637	44,4459
10 ^h 22 ^m 00 ^s	-5,5229	22,0396	111,6065	45,1970
10 ^h 25 ^m 00 ^s	-5,5238	22,0390	112,3639	45,6443
10 ^h 30 ^m 00 ^s	-5,5237	22,0385	113,6463	46,3848
10 ^h 32 ^m 00 ^s	-5,5237	22,0385	114,1663	46,6792
10 ^h 34 ^m 00 ^s	-5,5237	22,0385	114,6906	46,9724
10 ^h 38 ^m 00 ^s	-5,5248	22,0380	115,7526	47,5544
10 ^h 42 ^m 00 ^s	-5,5249	22,0374	116,8329	48,1313

Nach [Ol1] gilt: für $i = 1, 2, 3$:

$$(r_i \tan a_i) \cdot x + (\tan a_i) \cdot y + z = -r_i$$

Exemplarisch erhält man aus drei Messwerten:

```
eqs:={ 0*( +5.977947)*x+( +5.977947)*y+z= 0 ,
        567*(-31.031449)*x+(-31.031449)*y+z= -567 ,
        1227*( -2.065963)*x+( -2.065963)*y+z=-1227 } :
numeric::solve(eqs,{x,y,z});
{[x=-0.856121335, y=422.3335799, z=-2524.687757]}
```

Aus $x \approx -0,856$ folgt $\gamma = \tan^{-1} x \approx -40,6^\circ$ als Winkel zwischen der Wandnormalen und der exakten Südrichtung, d. h. die Wandnormale zeigt in Richtung $139,4^\circ$.⁴

4.2 Balkon

Messung für einen Balkon am 11. Juli 2004

Aus allen Messwerten gewinnt man das Gleichungssystem

⁴ Die Messung eines Schülers am 29.7.2004 führte auf $\gamma = -38,1^\circ \pm 2,5^\circ$

$$\begin{aligned} 18096,0026 \cdot x + 524,5174 \cdot y - 83,4578 \cdot z &= 5653,1388 \\ 2258800,9221 \cdot x + 18096,0026 \cdot y - 5653,1388 \cdot z &= 892860,3380 \\ -5653,1388 \cdot x - 83,4578 \cdot y + 18,0000 \cdot z &= -20700,000, \end{aligned}$$

das die folgende Lösung besitzt:

$$x = 2,168715262 ; y = 99,26225011 ; z = 1026,347634 .$$

Aus $x \approx 2,17 \pm 0,09$ folgt $\gamma = \tan^{-1} x = (65,25 \pm 0,90)^\circ$ als Winkel der Wandnormalen. Visiert man entlang des Balkongeländers, so blickt man in Richtung $155,25^\circ$. Um genau die Südrichtung zu erhalten, muss man sich dann um $24,75^\circ$ nach rechts drehen.

Tabelle 4. Messung und Auswertung (Balkon)

Zeitpunkt	Ort	Std.winkel	$\tan(\text{Azimut})$	Azimut
τ_i [MESZ]	r_i [mm]	t_i [°]	$\tan a_i$	a_i [°]
09 ^h 10 ^m 00 ^s	0,0	-62,9897	-10,3128	95,5385
09 ^h 13 ^m 00 ^s	5,5	-62,2399	-9,2870	96,1458
09 ^h 15 ^m 00 ^s	9,5	-61,7398	-8,7056	96,5528
09 ^h 18 ^m 00 ^s	14,5	-60,9898	-7,9525	97,1671
09 ^h 20 ^m 00 ^s	18,0	-60,4899	-7,5159	97,5788
09 ^h 35 ^m 00 ^s	47,5	-56,7403	-5,2747	100,7350
09 ^h 37 ^m 00 ^s	53,0	-56,2403	-5,0664	101,1654
09 ^h 50 ^m 00 ^s	81,0	-52,9907	-4,0032	104,0253
09 ^h 56 ^m 00 ^s	98,0	-51,4907	-3,6344	105,3843
10 ^h 02 ^m 00 ^s	112,0	-49,9910	-3,3184	106,7700
10 ^h 17 ^m 00 ^s	157,0	-46,2412	-2,6941	110,3637
10 ^h 22 ^m 00 ^s	175,0	-44,9913	-2,5249	111,6065
10 ^h 25 ^m 00 ^s	185,0	-44,2415	-2,4305	112,3639
10 ^h 30 ^m 00 ^s	204,0	-42,9915	-2,2839	113,6463
10 ^h 32 ^m 00 ^s	210,0	-42,4915	-2,2286	114,1663
10 ^h 34 ^m 00 ^s	217,0	-41,9915	-2,1751	114,6906
10 ^h 38 ^m 00 ^s	233,0	-40,9918	-2,0730	115,7526
10 ^h 42 ^m 00 ^s	250,0	-39,9918	-1,9768	116,8329

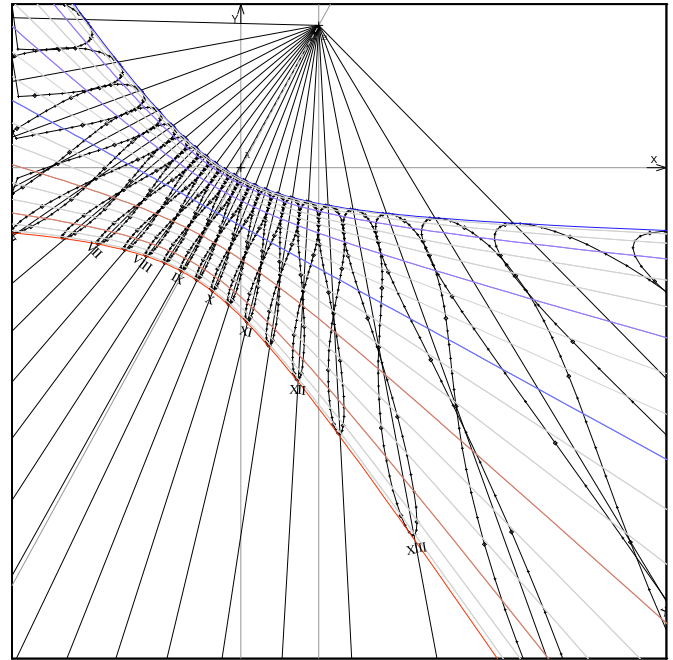


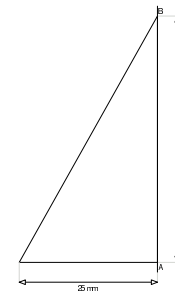
Abbildung 17. Modell der vertikalen Sonnenuhr

5 Entwurf der Sonnenuhr

Der Entwurf einer Sonnenuhr aus den gemessenen und ausgewerteten Daten kann mittels einer geeigneten Software erfolgen. Das nachfolgende Beispiel wurde mit dem Programm `shadows` [B11] erzeugt und zeigt die Geometrie einer Sonnenuhr für die Wand am Gebäude der Martinsschule. Ein gleichartiges Ergebnis liefert das Programm `sonne` [So1].

6 Aufgaben und Anregungen

1. Welche maximale Höhe erreicht die Sonne für einen Beobachter im Horizontsystem in Bamberg im Sommer bzw. im Winter?
2. An der Gangolfskirche liegen Turmuhr und Sonnenuhr direkt untereinander. An welchen Tagen des Jahres zeigt die Sonnenuhr genau die bürgerliche Zeit an?
3. Konstruiere den Tagesbogen der Sonne für einen der beiden Projektstage in Bamberg. In welcher Himmelsrichtung geht die Sonne auf bzw. unter? Überprüfe das Ergebnis mit einem geeigneten Programm.
4. Die Abbildungen zeigen den Schattenwurf eines Balkongeländers (Abb. 19). Mit dem Programm `Cartes du Ciel` wurde die Himmelsrichtung des Geländers bestimmt (Abb. 20). Konstruiere eine vertikale Sonnenuhr, die parallel zum Balkongeländer montiert werden könnte.
5. Die beiden Fotos (Abb. 21 u. Abb. 22) zeigen vertikale Sonnenuhren. Schätze die Richtungen der Wand anhand der Fotos.
6. Das Foto (Abb. 23) zeigt einen Sonnenuntergang, der nahe Geisfeld ($\varphi = 49^\circ 52' 10''$ Nord ; $\lambda = 11^\circ 0' 30''$ Ost) aufgenommen wurde. In welcher Himmelsrichtung geht die Sonne unter? Schätze den Winkel zwischen Sonne und Altenburg ab, wenn von einem Sonnendurchmesser von $1914''$ ausgegangen wird. An welchen Tagen des Jahres erfolgt vom Standort dieses Beobachters der Sonnenuntergang in der Richtung der Altenburg?
7. Mit einem Kompass (Abb. 24) ließe sich ebenfalls die Richtung einer Wand ermitteln. Welche Besonderheiten müssten eventuell bei einer derartigen Messung beachtet werden? Welche Genauigkeit darf man vergleichsweise erwarten?
8. Welche unterschiedliche Konstruktion weist eine Sonnenuhr in Kapstadt im Vergleich zu einer Sonnenuhr in Bamberg auf?



Koordinaten der Punkte A und B des Gnomons: A (0,0) B (26,4487) mm, 3300 mm) B (44,27 mm, 6128)

Achtung: Diese Zeichnung ist ein Hilfsmittel zur Messung!

Abbildung 18. Länge und Position des Gnomons

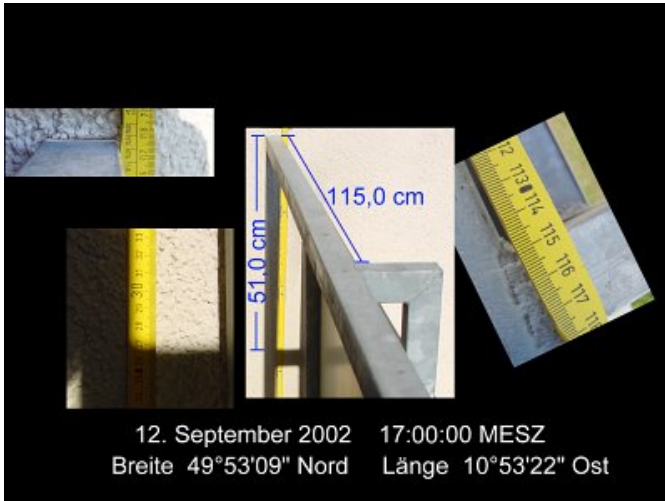


Abbildung 19. Schattenwurf



Abbildung 22. Sonnenuhr an der Kirche in Königsberg

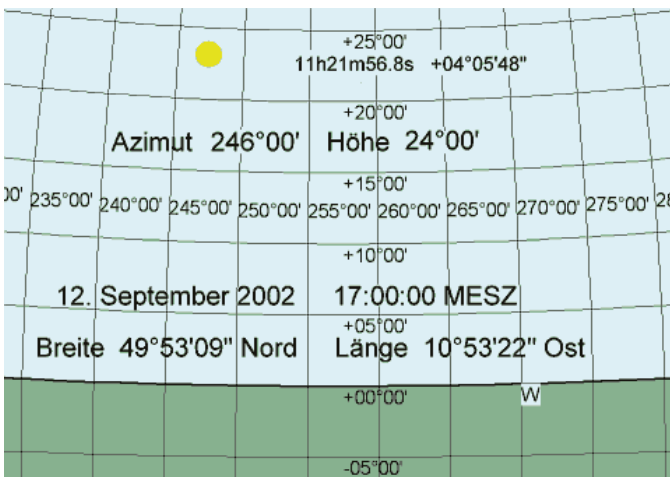


Abbildung 20. Position der Sonne zum Zeitpunkt des Schattenwurfs im elektronischen Himmelsatlas [Ch1]



Abbildung 23. Sonnenuntergang am 30. September 2002 18:58 MESZ



Abbildung 21. Sonnenuhr an der Luitpoldschule



Abbildung 24. Kompass

Literatur

- [AfA] Neckel, T., (Hg); Neumann, M., (Hg): *Astronomie für Alle, Einführung in die Himmelsbeobachtung*, SuW-Basics 1, Verlag Sterne und Weltraum, Heidelberg, (2002)
- [Ah1] Neckel, T.,(Hg): *Ahnerts Astronomisches Jahrbuch 2004*, Verlag Sterne und Weltraum, Heidelberg, (2003)
- [Ba1] Backhaus, U.: *Theoretische Physik – Himmelsmechanik; Aufzeichnungen, Folien, Programme: Vorlesungsunterlage*, Universität Essen, Sommersemester 1998 (1998)
<http://didaktik.physik.uni-essen.de/~backhaus/lectures.htm>
- [Ba2] Backhaus, U.: *Einführung in die Phänomenologische Astronomie: Vorlesungsskript*, Universität Essen, Wintersemester 2001/2002, (2001)
<http://didaktik.physik.uni-essen.de/~backhaus/lectures.htm>
- [Ba3] Backhaus, U.: *Einführung in die Himmelsmechanik und Astrophysik: Vorlesungsskript*, Universität Essen, Sommersemester 2002, (2002)
<http://didaktik.physik.uni-essen.de/~backhaus/lectures.htm>
- [Ba4] Backhaus, U.: *Himmelsmechanik – Newton und die Kepler’schen Gesetze: Vorlesungsskript*, Universität Essen, Wintersemester 2002/2003, (2002)
<http://didaktik.physik.uni-essen.de/~backhaus/lectures.htm>
- [B11] Blateyron, F.: *Shadows 2.0.1, Anwendung zum Entwurf von Sonnenuhren*, (2004)
<http://www.shadowspro.com> (Freeware)
- [B12] Bloodshed Software: *devcpp, Version 4.9.8.10*, (2004)
<http://www.bloodshed.net/dev/devcpp.html>
<http://prdownloads.sourceforge.net/dev-cpp/devcpp4980.exe> (Freeware)
- [Ch1] Chevalley, P.: *Cartes du Ciel – Himmelskarten*, Elektronischer Himmelsatlas, (2000)
<http://www.stargazing.net/astropc/index.html> (Freeware)
- [Fu1] Fuchsteiner, B., et. al. : *MuPad Light Version 2.50*, SciFace (2002)
<http://www.sciface.com>
 (Die Light-Version ist als Freeware erhältlich.)
- [GGZ1] Gondolatsch, G. ; Groschopf, G. ; Zimmermann, O.: *Astronomie I, Die Sonne und ihre Planeten*; Klett Studienbücher, Stuttgart, 1. Aufl., 1977
- [He1] Herrmann, J: *dtv-Atlas zur Astronomie: Deutscher Taschenbuch Verlag, München, 7. Auflage*, 1983
- [Le1] Lermer, R.: *Grundkurs Astronomie*; Bayerischer Schulbuch Verlag, München, 6. Auflage, 2000
- [Ol1] Oleak, H.: *Astronomische Bestimmung der Ausrichtung einer Wand für die Konstruktion einer Sonnenuhr*, (Mathematische Ergänzung zu einem Artikel in *Sterne und Weltraum*), (2003)
http://www.mpia-hd.mpg.de/suw/SuW/2004/02-04/ole_intn.pdf
- [RA1] Reda I.,Andreas A.: *Solar Position Algorithm for Solar Radiation Applications*; NREL (National Renewable Energy Laboratory), Technical Report NREL/TP-560-34302; Colorado (June 2003)
<http://www.nrel.gov/docs/fy03osti/34302.pdf>
 Download des C++ Algorithmus:
<http://rredc.nrel.gov/solar/codesandalgorithms/spa/spa.c>
<http://rredc.nrel.gov/solar/codesandalgorithms/spa/spa.h>
- [Ry1] Rymes, M.: *NREL’s SOLPOS 2.0*, NREL (National Renewable Energy Laboratory), Colorado (2000)
http://rredc.nrel.gov/solar/codes_algs/solpos/aboutsolpos.html
- [So1] Sonderegger, H: *Sonne.exe, Version 2.0.3*, zur Berechnung von Sonnenstand und Sonnenuhren
<http://sonne.at.gg> (Freeware)
- [Ze1] Borgeest, U., (Hg): *Zeit – Das ewige Rätsel*, SuW-Special 5, Verlag Sterne und Weltraum, Heidelberg, (2000)

Anhang

Zeitgleichung für das Jahr 2004

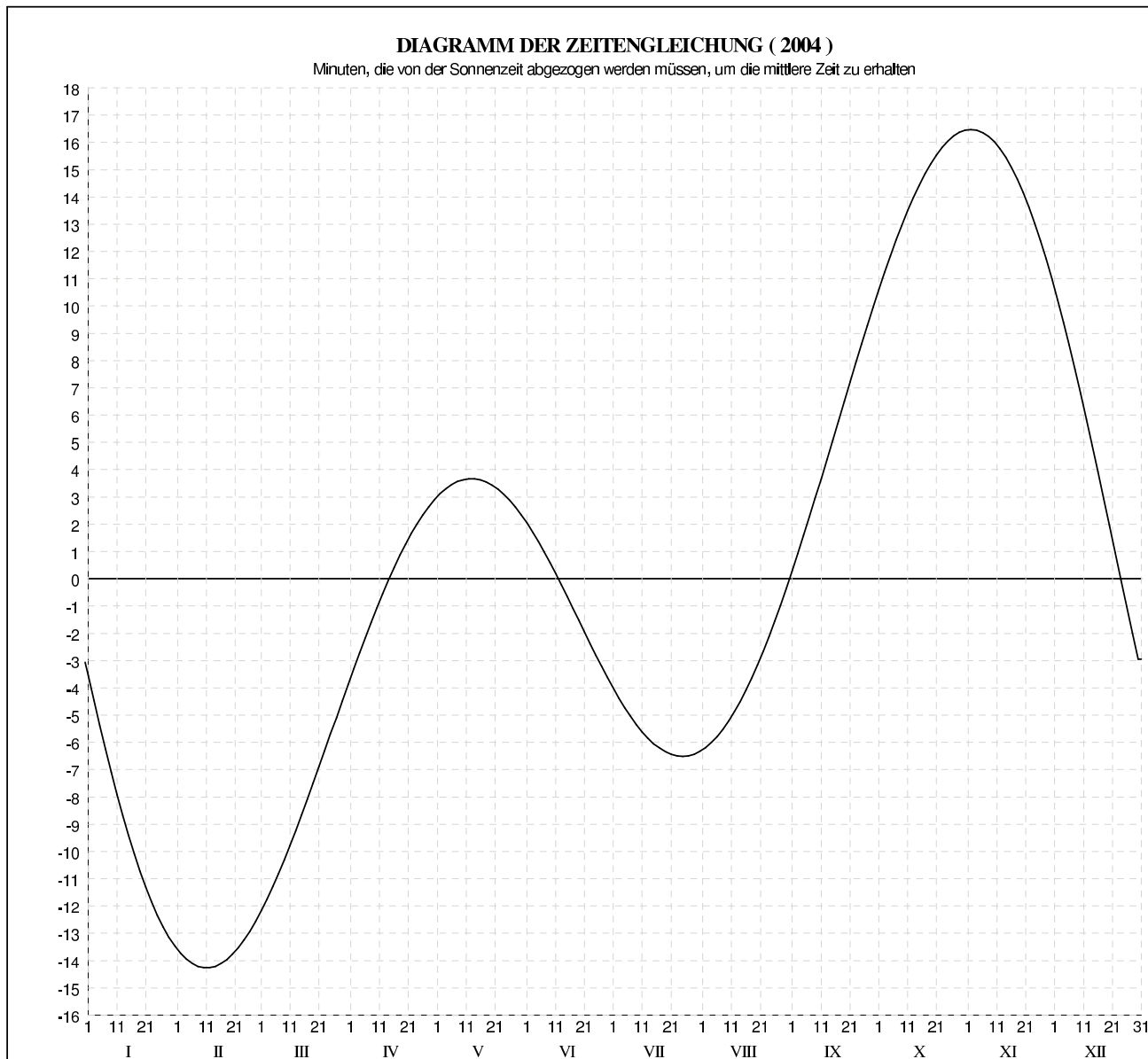


Abbildung 25. nach [B11]: Zeitgleichung

Analemma-Kurve für das Jahr 2004

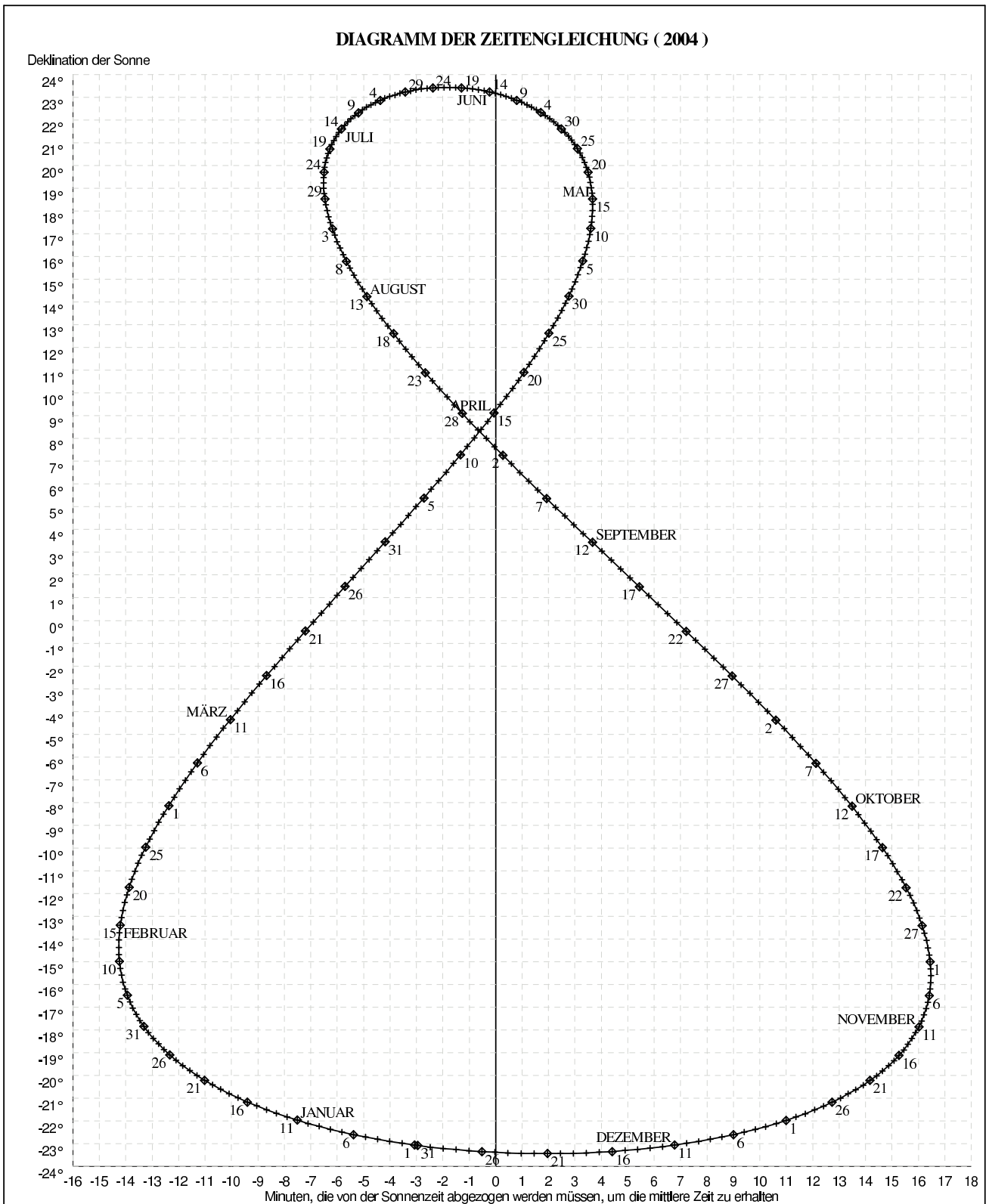


Abbildung 26. nach [B11]: Analemma-Kurve

Tabellen

Summe EoT + Längengrad-Korrektur in min:sec für 2004

Es gilt: Zonenzeit (MEZ) = wahre Ortszeit - Tabellenwert
 Die Werte gelten für 12 Uhr Zonenzeit, aber nicht Sommerzeit!
 Zeitdifferenz fuer geogr. Laenge $-10.9^\circ = 16:27$ min:sec

	Jan	Feb	Mar	Apr	Mai	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dez
1.	-19:44	-29:57	-28:43	-20:13	-13:29	-14:18	-20:21	-22:44	-16:20	-6:00	-0:02	-5:36
2.	-20:12	-30:05	-28:31	-19:55	-13:23	-14:28	-20:32	-22:40	-16:01	-5:41	-0:01	-5:59
3.	-20:40	-30:12	-28:19	-19:38	-13:17	-14:38	-20:43	-22:35	-15:41	-5:22	-0:01	-6:23
4.	-21:08	-30:19	-28:06	-19:20	-13:11	-14:48	-20:54	-22:30	-15:21	-5:04	-0:02	-6:47
5.	-21:35	-30:24	-27:52	-19:03	-13:06	-14:59	-21:05	-22:24	-15:01	-4:46	-0:04	-7:12
6.	-22:02	-30:29	-27:38	-18:46	-13:01	-15:10	-21:15	-22:17	-14:41	-4:28	-0:06	-7:37
7.	-22:28	-30:33	-27:24	-18:29	-12:58	-15:21	-21:24	-22:10	-14:20	-4:11	-0:09	-8:03
8.	-22:54	-30:36	-27:09	-18:13	-12:54	-15:32	-21:34	-22:02	-14:00	-3:54	-0:13	-8:30
9.	-23:19	-30:38	-26:54	-17:56	-12:51	-15:44	-21:42	-21:53	-13:39	-3:37	-0:18	-8:56
10.	-23:44	-30:40	-26:39	-17:40	-12:49	-15:56	-21:51	-21:44	-13:18	-3:21	-0:24	-9:24
11.	-24:08	-30:41	-26:23	-17:24	-12:48	-16:08	-21:59	-21:35	-12:57	-3:06	-0:31	-9:51
12.	-24:32	-30:41	-26:07	-17:09	-12:46	-16:20	-22:06	-21:25	-12:36	-2:51	-0:39	-10:19
13.	-24:55	-30:40	-25:50	-16:54	-12:46	-16:33	-22:14	-21:14	-12:14	-2:37	-0:47	-10:47
14.	-25:17	-30:39	-25:34	-16:39	-12:46	-16:46	-22:20	-21:03	-11:53	-2:23	-0:56	-11:16
15.	-25:39	-30:36	-25:17	-16:24	-12:47	-16:59	-22:26	-20:51	-11:32	-2:09	-1:06	-11:45
16.	-26:00	-30:33	-25:00	-16:10	-12:48	-17:11	-22:32	-20:39	-11:10	-1:56	-1:17	-12:14
17.	-26:21	-30:30	-24:43	-15:56	-12:50	-17:24	-22:37	-20:26	-10:49	-1:44	-1:29	-12:43
18.	-26:40	-30:25	-24:25	-15:43	-12:52	-17:37	-22:41	-20:12	-10:27	-1:33	-1:42	-13:13
19.	-26:59	-30:20	-24:08	-15:30	-12:55	-17:51	-22:45	-19:59	-10:06	-1:22	-1:55	-13:43
20.	-27:18	-30:15	-23:50	-15:17	-12:58	-18:04	-22:49	-19:44	-9:45	-1:11	-2:09	-14:12
21.	-27:35	-30:08	-23:32	-15:05	-13:02	-18:17	-22:52	-19:29	-9:24	-1:02	-2:24	-14:42
22.	-27:52	-30:01	-23:14	-14:53	-13:07	-18:30	-22:54	-19:14	-9:02	-0:52	-2:40	-15:12
23.	-28:08	-29:54	-22:56	-14:42	-13:12	-18:43	-22:56	-18:58	-8:41	-0:44	-2:57	-15:42
24.	-28:24	-29:45	-22:38	-14:31	-13:17	-18:55	-22:57	-18:42	-8:21	-0:36	-3:14	-16:12
25.	-28:38	-29:36	-22:20	-14:21	-13:23	-19:08	-22:57	-18:26	-8:00	-0:30	-3:32	-16:41
26.	-28:52	-29:27	-22:01	-14:11	-13:30	-19:21	-22:57	-18:09	-7:39	-0:23	-3:51	-17:11
27.	-29:05	-29:17	-21:43	-14:02	-13:37	-19:33	-22:57	-17:52	-7:19	-0:18	-4:11	-17:41
28.	-29:17	-29:06	-21:25	-13:53	-13:44	-19:46	-22:56	-17:34	-6:59	-0:13	-4:31	-18:10
29.	-29:28	-28:55	-21:07	-13:44	-13:52	-19:58	-22:54	-17:16	-6:39	-0:09	-4:52	-18:39
30.	-29:38		-20:49	-13:37	-14:00	-20:09	-22:51	-16:58	-6:19	-0:06	-5:14	-19:08
31.	-29:48		-20:31		-14:09		-22:48	-16:39		-0:04		-19:37

H. Sonderegger

Abbildung 27. nach [Sol1]: Tabelle der Zeitkorrektur

Zeitgleichung in min:sec für das Jahr 2004

Es gilt: Zeitgleichung = wahre Ortszeit - mittlere Ortszeit
 Die Werte gelten für 12 Uhr Zonenzeit, aber nicht Sommerzeit!
 (Zonenmeridian: -15.0)

	Jan	Feb	Mar	Apr	Mai	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dez
1.	-3:17	-13:30	-12:17	-3:47	2:57	2:08	-3:55	-6:18	0:07	10:27	16:25	10:50
2.	-3:45	-13:38	-12:05	-3:29	3:04	1:59	-4:06	-6:14	0:26	10:46	16:25	10:27
3.	-4:13	-13:46	-11:52	-3:11	3:10	1:49	-4:17	-6:09	0:46	11:05	16:25	10:03
4.	-4:41	-13:52	-11:39	-2:54	3:16	1:39	-4:28	-6:03	1:05	11:23	16:25	9:39
5.	-5:08	-13:58	-11:26	-2:37	3:21	1:28	-4:38	-5:57	1:25	11:41	16:23	9:14
6.	-5:35	-14:02	-11:12	-2:20	3:25	1:17	-4:48	-5:50	1:46	11:59	16:21	8:49
7.	-6:01	-14:06	-10:57	-2:03	3:29	1:06	-4:58	-5:43	2:06	12:16	16:17	8:23
8.	-6:27	-14:09	-10:43	-1:46	3:32	0:54	-5:07	-5:35	2:27	12:33	16:13	7:57
9.	-6:53	-14:12	-10:27	-1:30	3:35	0:43	-5:16	-5:27	2:48	12:49	16:08	7:30
10.	-7:17	-14:13	-10:12	-1:14	3:37	0:31	-5:24	-5:18	3:09	13:05	16:02	7:03
11.	-7:42	-14:14	-9:56	-0:58	3:39	0:18	-5:32	-5:08	3:30	13:21	15:56	6:35
12.	-8:05	-14:14	-9:40	-0:42	3:40	0:06	-5:40	-4:58	3:51	13:36	15:48	6:07
13.	-8:28	-14:14	-9:24	-0:27	3:41	-0:06	-5:47	-4:47	4:12	13:50	15:40	5:39
14.	-8:51	-14:12	-9:07	-0:12	3:40	-0:19	-5:54	-4:36	4:33	14:04	15:30	5:11
15.	-9:13	-14:10	-8:50	0:02	3:40	-0:32	-6:00	-4:24	4:55	14:17	15:20	4:42
16.	-9:34	-14:07	-8:33	0:17	3:39	-0:45	-6:05	-4:12	5:16	14:30	15:09	4:13
17.	-9:54	-14:03	-8:16	0:30	3:37	-0:58	-6:10	-3:59	5:38	14:42	14:58	3:43
18.	-10:14	-13:59	-7:59	0:44	3:35	-1:11	-6:15	-3:46	5:59	14:54	14:45	3:14
19.	-10:33	-13:54	-7:41	0:57	3:32	-1:24	-6:19	-3:32	6:20	15:05	14:32	2:44
20.	-10:51	-13:48	-7:23	1:10	3:28	-1:37	-6:22	-3:18	6:42	15:15	14:17	2:14
21.	-11:09	-13:42	-7:05	1:22	3:24	-1:50	-6:25	-3:03	7:03	15:25	14:02	1:44
22.	-11:26	-13:35	-6:47	1:33	3:20	-2:03	-6:27	-2:48	7:24	15:34	13:46	1:15
23.	-11:42	-13:27	-6:29	1:45	3:15	-2:16	-6:29	-2:32	7:45	15:42	13:30	0:45
24.	-11:57	-13:19	-6:11	1:55	3:09	-2:29	-6:30	-2:16	8:06	15:50	13:12	0:15
25.	-12:11	-13:10	-5:53	2:06	3:03	-2:42	-6:31	-1:59	8:27	15:57	12:54	-0:15
26.	-12:25	-13:00	-5:35	2:16	2:57	-2:54	-6:31	-1:42	8:47	16:03	12:35	-0:45
27.	-12:38	-12:50	-5:17	2:25	2:50	-3:07	-6:30	-1:25	9:08	16:09	12:16	-1:14
28.	-12:50	-12:40	-4:59	2:34	2:42	-3:19	-6:29	-1:07	9:28	16:13	11:55	-1:43
29.	-13:01	-12:29	-4:41	2:42	2:34	-3:31	-6:27	-0:49	9:48	16:17	11:34	-2:13
30.	-13:12		-4:22	2:50	2:26	-3:43	-6:25	-0:31	10:07	16:21	11:12	-2:42
31.	-13:22		-4:05		2:17		-6:22	-0:12		16:23		-3:10

H.Sonderegger

Abbildung 28. nach [So1]: Tabelle der Zeitgleichung



Abbildung 29. Fotomontage einer Sonnenuhr beim Eingang der Martinschule

Astronomische Bestimmung der Ausrichtung einer Wand für die Konstruktion einer Sonnenuhr¹

Von HANS OLEAK

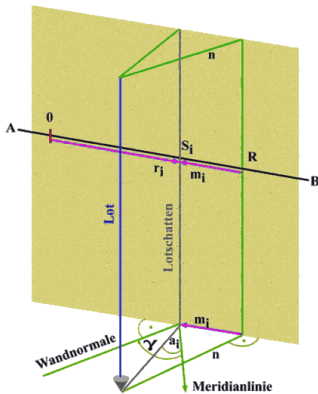
Für die Konstruktion einer Sonnenuhr auf einer senkrechten Wand benötigt man ihre exakte Ausrichtung in Bezug auf die Ost-West-Richtung. Wer hier nicht nur zum Kompaß greifen will, sondern einen sehr genauen Wert ermitteln möchte, dem bietet sich das folgende Verfahren an. Man benötigt hierzu lediglich ein Lot, ein Lineal, eine Uhr und ein Hilfsmittel zur Bestimmung des Sonnenazimuts (z.B. *Ahmerts Astronomisches Jahrbuch*).

Man befestigt vor der Wand ein Lot. (Da das Lot selbst bei geringer Luftbewegung zu pendeln beginnt, muss es gedämpft werden, z.B. durch freies Eintauchen in einen mit Wasser gefüllten Eimer.) Der Abstand des Lots von der Wand ist so zu wählen, dass der Schatten des Lots während der vorgesehenen Messzeit einen merklichen Abschnitt der Wandfläche (etwa 40 bis 50 cm) überstreicht. Auf der Wand zieht man nun eine horizontale Linie, die aber keineswegs genau horizontal ausgerichtet sein muss.

Ableitung der Bestimmungsgleichung

Auf der Linie AB werden die Schnittstellen S_i des Lotschattens mit dieser Linie zu beliebigen Zeiten markiert und die zugehörige Uhrzeit τ_i (z.B. in MEZ) notiert.

Von einem willkürlich festgelegten Ursprung O auf der Linie AB werden nun die Strecken $OS_i = r_i$ vermessen. (Der Ursprung kann natürlich auch in einer, z.B. der ersten, markierten Schnittstelle liegen.) Diese Strecken erhalten ein positives Vorzeichen, wenn der markierte Punkt S_i rechts von O liegt, ein negatives, wenn er links davon liegt.



Zur Ableitung der Bestimmungsgleichung für den sogenannten Deklinationswinkel γ , – dem Winkel zwischen der Wandnormalen und der exakten Südrichtung – benötigen wir die Beziehung zwischen r_i und γ . Dieser Winkel soll wie das Azimut a_i der Sonne von Süden über Westen gemessen werden. Wir legen weiterhin fest, dass die Strecken m_i von der orthogonalen Lotprojektion R zu den Schnittstellen S_i negativ gezählt werden, wenn sie links von R liegen, um eindeutige Aussagen über den Quadranten zu erhalten. Es gilt zunächst (s. Abb.) im rechtwinkligen Dreieck² aus der Lotspitze und den beiden Seiten m_i, n :

$$\tan(\gamma - a_i) = -\frac{m_i}{n}. \quad (1)$$

Daraus erhält man mit

$$\tan(a_i - \gamma) = (\tan a_i - \tan \gamma) / (1 + \tan a_i \tan \gamma) = m_i/n$$

$$\tan a_i = \frac{\tan \gamma + \frac{m_i}{n}}{1 - \frac{m_i}{n} \tan \gamma}. \quad (2)$$

Bezeichnet nun $L = OR$ den zunächst unbekanntem (und eigentlich auch nicht interessierenden) Abstand der Lotprojektion auf der Wand vom gewählten Nullpunkt O, so gilt (man beachte, dass in der gezeichneten Situation der Abbildung $m_i < 0$ ist):

$$m_i = r_i - L. \quad (3)$$

Führen wir diesen Ausdruck in Gleichung (2) ein, so erhalten wir nach einigen Umformungen

$$r_i \tan a_i \tan \gamma - \tan a_i (L \tan \gamma + n) + n \tan \gamma - L + r_i = 0. \quad (4)$$

Bezeichnen wir die Unbekannten mit

$$\begin{aligned} x &= \tan \gamma \\ y &= -L \tan \gamma - n \\ z &= n \tan \gamma - L, \end{aligned} \quad (5)$$

so erhalten wir eine lineare Gleichung mit 3 Unbekannten

$$(r_i \tan a_i) \cdot x + (\tan a_i) \cdot y + z + r_i = 0. \quad (6)$$

Die Unbekannten x, y, z lassen sich aus 3 Gleichungen (6) für 3 unabhängige Messungen $(r_i, \tan a_i)$ berechnen. Man kann diese 3 Gleichungen leicht nach x (und damit nach $\tan \gamma$) auflösen. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \Delta_{32} &= \tan a_3 - \tan a_2 \\ \Delta_{13} &= \tan a_1 - \tan a_3 \\ \Delta_{21} &= \tan a_2 - \tan a_1 \end{aligned} \quad (7)$$

erhält man explizit die Lösung

$$x = \tan \gamma = -\frac{r_1 \Delta_{32} + r_2 \Delta_{13} + r_3 \Delta_{21}}{r_1 \tan a_1 \Delta_{32} + r_2 \tan a_2 \Delta_{13} + r_3 \tan a_3 \Delta_{21}}. \quad (8)$$

Für die Koeffizienten der Gleichung benötigen wir außer den gemessenen Strecken r_i die zugehörigen Azimute a_i der Sonne. Wir berechnen zunächst den Stundenwinkel t_i der Sonne zur Markierungszeit τ_i , wozu wir die geographische Länge des Ortes benötigen. Der Stundenwinkel ist (alle Glieder müssen entweder im Zeitmaß oder im Winkelmaß angegeben werden. Umrechnung: $\tau[^\circ] = \tau[h]/15$):

$$t_i = \tau_i(\text{MEZ}) - 1^h - \lambda + \text{Zeitgleichung} - 12^h. \quad (9)$$

Die geographischen Koordinaten des Ortes λ, ϕ (Länge λ negativ östlich vom Meridian von Greenwich!) können mit genügender Genauigkeit einer Landkarte entnommen werden. Die Zeitgleichung enthält jeder astronomische Kalender. Aus dem Stundenwinkel t_i und der Deklination δ der Sonne sowie der geographischen Breite ϕ des Ortes ergibt sich das Azimut:

$$\tan a_i = \frac{\sin t_i}{\sin \phi \cos t_i - \cos \phi \tan \delta}. \quad (10)$$

(Für die Deklination δ kann wegen der geringen Veränderung ein einheitlicher, für den Tag gültiger Wert genommen werden.) Da bei einer von der Ost-West-Richtung abweichenden Wand Messwerte vorkommen können, die zu Sonnenazimuten nahe $a = \pm 90^\circ$ führen können, sollten sie wegen $\tan a \rightarrow \pm \infty$ weggelassen werden. (Auf die Besonderheiten einer Ost- oder Westwand wird weiter unten eingegangen.)

Das Vorzeichen von x bestimmt den Quadranten von γ : $x > 0$ bedeutet bei einer Süd- und Westwand den ersten Quadranten und bei einer Ostwand den dritten Quadranten; $x < 0$ bedeutet bei einer Süd- und Ostwand den vierten Quadranten und bei einer Westwand den zweiten Quadranten.

Abbildung 30. Aus der Originalarbeit [O11]